

REVIVENDO ERATÓSTENES

AUTOR

FERNANDO ANTONIO PIRES VIEIRA

Monografia apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos como requisito parcial para conclusão do Curso de Pós-graduação *lato sensu* em Ensino de Astronomia.

Orientador: Paulo Cesar Rodrigues Pereira, M.Sc.

Campos dos Goytacazes - RJ

JUNHO - 2005

Este trabalho, nos termos da legislação que resguarda os direitos autorais, é considerado propriedade institucional.

É permitida a transcrição parcial de textos do trabalho, ou menção ao mesmo, para comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do autor e não definem uma orientação da Instituição.

REVIVENDO ERATÓSTENES

AUTOR

FERNANDO ANTONIO PIRES VIEIRA

Monografia apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos como requisito parcial para conclusão do Curso de Pós-graduação *lato sensu* em Ensino de Astronomia.

Aprovado em 4 de junho de 2005.

Comissão Examinadora:

Orientador: Paulo Cesar Rodrigues Pereira, M. Sc.

Marcelo de Oliveira Souza, D. Sc.

Raul Figueira, M. Sc.

RESUMO

Esta monografia propõe e analisa um método alternativo ao histórico experimento de Eratóstenes para a determinação da circunferência da Terra, visando a aplicação em escolas. Nosso objetivo é, além de detalhar o método, descrever os procedimentos, passo a passo, para serem reproduzidos facilmente. Comparamos o método proposto com os atualmente empregados em escolas da Europa e da América do Norte.

O método, ou melhor, a atividade se baseia na determinação por dois grupos de estudantes, em locais diferentes, da altura do Sol e do instante da culminação do Sol. A partir daí são calculadas as latitudes locais e a diferença em longitude. Conhecendo-se a distância entre os locais, a circunferência da Terra é obtida com auxílio de um modelo.

São também apresentados os resultados das várias atividades em que o método foi empregado, assim como analisadas trinta e cinco determinações obtidas em março de 2005 quando participaram quatorze instituições.

Palavras-chave: latitude. Longitude, passagem meridiana, altura, declinação solar e gnômon.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	P. 1
I – BREVE HISTÓRICO DA DETERMINAÇÃO DAS DIMENSÕES DA TERRA	p. 4
II - VARIANTES DO EXPERIMENTO DE ERATÓSTENES EMPREGADOS HOJE	p.11
III – MÉTODO PROPOSTO	p.14
1. Materiais e informações necessários.....	p.15
2. Preparação dos estudantes.....	p.15
3. Confecção do gnômon.....	p.16
4. Orientação.....	p.17
5. Determinação da latitude e instante da culminação.....	p.18
6. Marcação das cidades no modelo.....	p.20
7. Cálculo da circunferência Terra	p.23
8. Discussão sobre os resultados da atividade.....	p.25
IV - A ATIVIDADE DE 2004	p.27
V - A ATIVIDADE DE MARÇO DE 2005	p.28
1. Os participantes	p.28
2. Os resultados obtidos.....	p.31
3. As determinações da circunferência da Terra	p.34
4. Análise estatística da amostra.....	p.37

CONCLUSÃO..... p.43

BIBLIOGRAFIA

GLOSSÁRIO

INTRODUÇÃO

A determinação da circunferência da Terra por Eratóstenes é considerada por muitos historiadores de ciência como um dos dez mais importantes experimentos científicos. Concebido e executado pelo sábio grego em cerca de 200a.C., consiste basicamente na obtenção da latitude de dois locais situados no mesmo meridiano. Uma vez conhecida a distância entre esses locais, é possível determinar a circunferência da Terra. Este método, com algumas adaptações, tem sido empregado em escolas da Europa e da América do Norte de ensinos fundamental e médio, visando o desenvolvimento de estudantes em ciências. Apresenta grande interdisciplinaridade entre a Astronomia, a Física, a Matemática, a História e a Geografia.

Em nosso trabalho diário na Fundação Planetário da Cidade do Rio de Janeiro, freqüentemente somos solicitados por alguns professores, mais comprometidos com o aprofundamento dos tópicos de Astronomia, para sugerir atividades extraclasse a serem desenvolvidas pelos estudantes. Algumas atividades que propomos são pouco desafiadoras: construção de modelos em escala de distâncias ou tamanhos do Sistema Solar, montagem de relógio solar, etc. Outras atividades necessitam de visitas freqüentes ao Planetário para a observação do Sol, por exemplo. Por isso, julgamos oportuno estudar a possibilidade de desenvolver um método alternativo ao de Eratóstenes normalmente empregado, mas que levasse em conta não só a determinação da latitude, mas também a diferença em longitude, permitindo uma abrangência geográfica maior. Além disso, deveria ser didaticamente mais satisfatório e despertar nos estudantes o gosto pela investigação científica.

Este trabalho foi orientado com o objetivo de desenvolver uma seqüência de procedimentos para que o método seja facilmente empregado na escola como atividade extraclasse. Essa atividade atende plenamente as sugestões sobre currículo diversificado propostas nos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais), regulamentados pela Lei 9394/96. O público-alvo são estudantes entre a 7ª série do ensino fundamental e a 3ª série do ensino médio (segundo avaliação do professor).

A atividade normalmente é coordenada de modo que várias escolas participem. Para fazer a determinação da circunferência é necessário que cada escola envolvida escolha como parceira uma outra escola, afastada, pelo menos, 500 quilômetros.

Um ponto fundamental é que os estudantes devem ser preparados para que tenham total compreensão da atividade de modo que os objetivos sejam alcançados. Entre os vários tópicos que devem ser abordados estão: forma da Terra, eclipses, movimento aparente do Sol, fusos horários, relações trigonométricas e regra de três.

As etapas mais delicadas são a determinação da latitude e do instante da culminação (passagem meridiana) do Sol. Para torná-las de fácil execução utilizamos o gnômon: uma haste fixada verticalmente no chão. O gnômon precisa ser instalado em um local ao ar livre onde possa ser iluminado pelo Sol entre as 10 e 15 horas, para que seja precisamente orientado, o que é feito pelo método de Vitruvius (ver pág.15), após o qual marca-se a meridiana.

Para obter a altura do Sol mede-se o comprimento da sombra no momento da passagem meridiana e a altura da haste. A tangente da altura angular do Sol é igual à razão entre a altura da haste e o comprimento da sombra. O passo seguinte é calcular a latitude local a partir da altura do Sol obtida e das coordenadas do Sol. O mesmo procedimento é executado pela cidade parceira.

As diferenças dos instantes das passagens meridianas nos dois locais é equivalente à diferença em longitude entre eles.

Em uma bola de isopor com uns 20 centímetros mede-se o perímetro com uma fita métrica obtendo-se uma relação entre graus e centímetros, e assinala-se na bola os dois locais.

Finalmente, para se obter a circunferência da Terra, emprega-se uma regra de três que relacione: a distância entre os dois pontos na bola, medida ao longo de um círculo máximo, a distância entre as duas cidades obtida em um *site* próprio (<http://www.wcrl.ars.usda.gov/cec/java/lat-long.htm>) e a circunferência da bola.

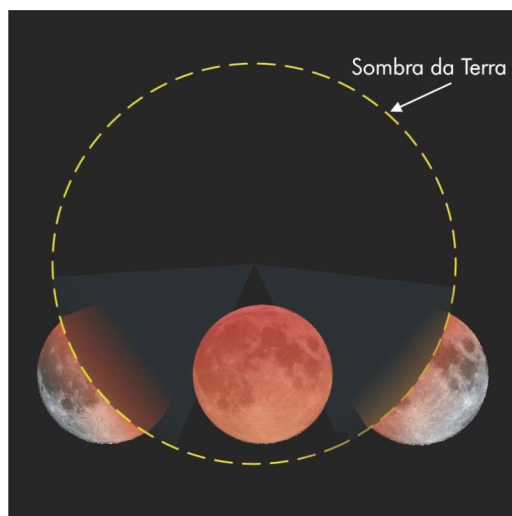
Após a realização da atividade em várias ocasiões e em locais bastante diversos, pudemos diagnosticar que, embora os resultados sejam bons, eles poderiam ser melhorados. Como toda experiência científica, os resultados dependem do método, mas também do cuidado nos preparativos e da atenção nas medições. Os itens que necessitam de maior atenção dos participantes são, em ordem de importância: determinação da meridiana (método de Vitruvius), verticalidade do gnômon, medição da altura da haste e do comprimento da sombra e medições na bola-modelo.

Um dos aspectos mais positivos da atividade tem sido a troca de experiências entre estudantes e professores, uma vez que o trabalho é coletivo e entre instituições, principalmente usando correio eletrônico e *chats*.

I – BREVE HISTÓRICO DA DETERMINAÇÃO DAS DIMENSÕES DA TERRA

As primeiras especulações a respeito da forma da Terra foram de natureza não científica.

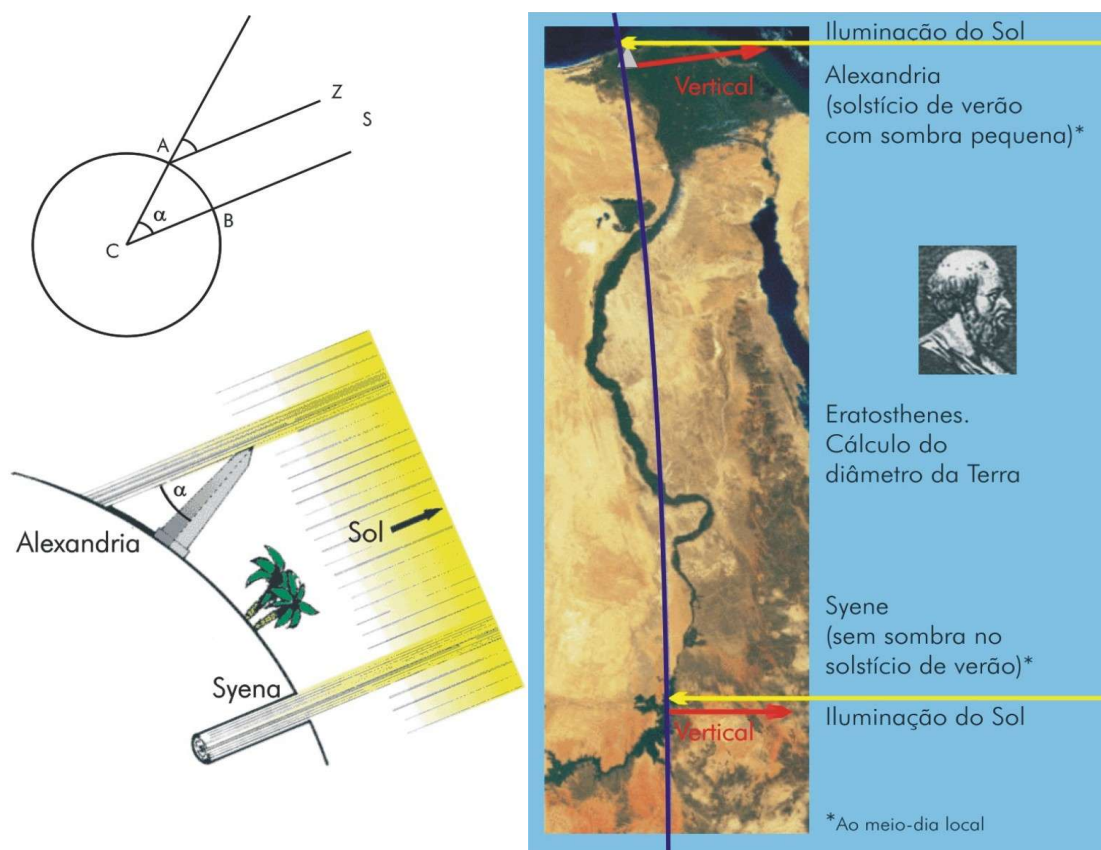
A partir do século VI antes de Cristo, na Grécia, surgiram visões mais racionais sobre a questão da forma de nosso planeta. A primeira sugestão de esfericidade partiu da Escola Pitagórica de Crotona. Segundo vários estudiosos da época, a esfera seria a forma mais bela. No século IV antes de Cristo, Aristóteles (384-322a.C.) apresentou argumentos mais sólidos. O mais importante deles estava relacionado com o eclipse da Lua, um fenômeno cuja natureza (alinhamento entre o Sol, a Terra e a Lua) já era conhecida na época. Aristóteles considerou que a sombra projetada da Terra sobre a Lua, durante a fase parcial dos eclipses lunares, tinha a forma circular porque a Terra era esférica. Mas essa explicação racional não foi aceita por todos. Durante a Idade Média, mesmo pessoas "cultas" repudiavam a forma esférica da Terra. Na opinião destes, "se a Terra fosse esférica seria impossível a um homem, ou qualquer outro corpo, ficar de cabeça para baixo, assim como seria inconcebível que o céu ficasse abaixo da Terra".



Exposições múltiplas do eclipse lunar de 20/1/2000

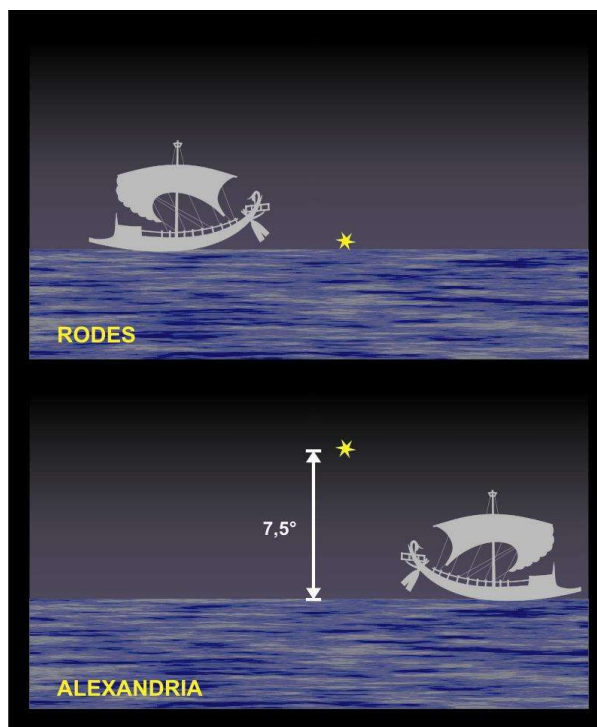
Os primeiros valores para a circunferência da Terra são de Aristóteles, que em sua obra *Mathematikoi* cita como sendo de aproximadamente 400.000 *estadios*, mas não diz como nem quem obteve este valor. Arquimedes (c.287-212a.C.), em seu tratado *De Arenae Numero* (O Contador de Areia), registra o valor de 300.000 *estadios*, mas igualmente não cita quem nem como esse valor foi obtido. O primeiro a detalhar um método e a chegar a valores mais realistas foi Eratóstenes (c.270-190a.C.). Para isso ele deduziu que, sendo a Terra esférica e estando o Sol muito distante, a sombra provocada pelo Sol ao meio-dia local deveria ter comprimentos diferentes em locais diferentes, mas localizados no mesmo meridiano. De fato, Eratóstenes obteve a informação de que na cidade de Siena, no dia de solstício de verão, ao meio-dia, o Sol ficava exatamente a pino. Nesse dia, o mesmo não acontecia na cidade de Alexandria, onde a sombra se projetava de um ângulo equivalente a 1/50 da circunferência. Eratóstenes sabia que as duas cidades estavam praticamente no mesmo meridiano e que a distância entre elas (AB na figura abaixo) era estimada em 5.000 *estadios*. Eratóstenes então estabeleceu a seguinte proporção:

$CT/5.000 = 50 \Rightarrow CT = 250.000 \text{ estadios}$, onde CT é a circunferência da Terra.



Método de Eratóstenes para calcular a circunferência da Terra

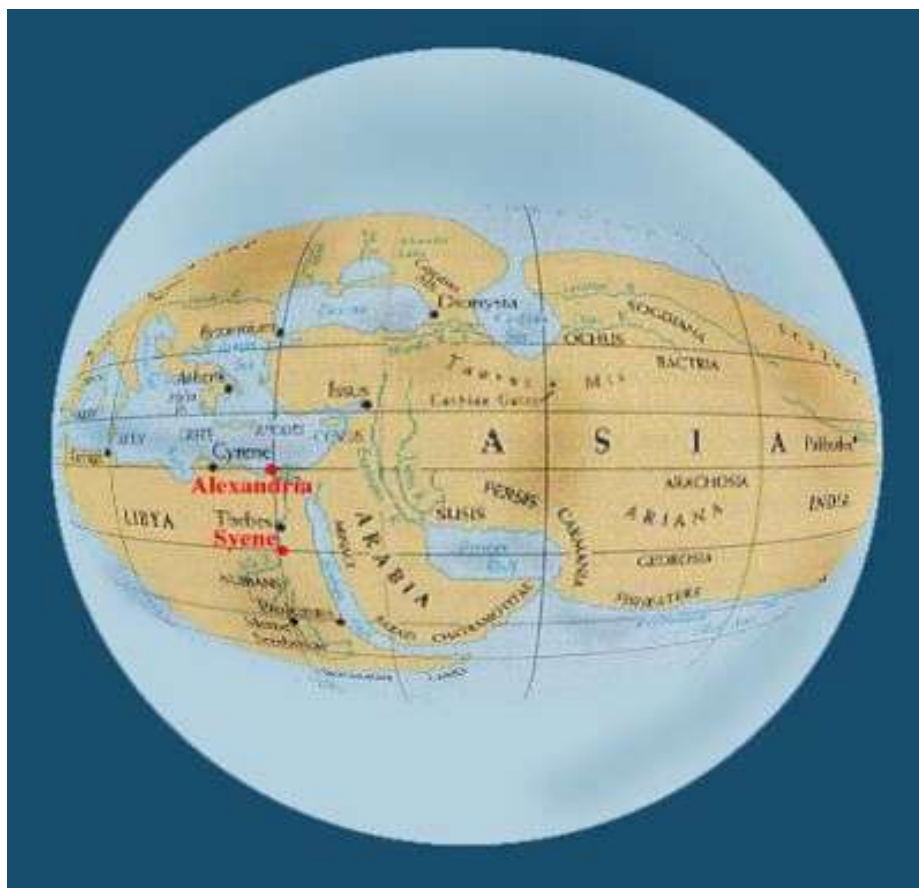
É bastante controversa a equivalência do *estádio* em quilômetro. Entre os possíveis valores estão: 0,148km, 0,158km e 0,185km. Adotaremos o valor de 0,185km considerado pelos estudiosos como o mais provável. Sendo assim, Eratóstenes teria encontrado para a circunferência o valor de 46,250km. Considerando o valor adotado hoje, 39.941km, sua precisão foi da ordem de 16%.



A determinação de Posidonius

Posidonius (135-51a.C.) determinou a circunferência da Terra usando uma técnica diferente: comparou a altura da brilhante estrela Canopus observada em Alexandria e Rodes. Nesta última era observada com muita dificuldade porque Canopus se encontrava praticamente no horizonte. Já em Alexandria, sua altura seria de $7,5^\circ$. Como as cidades de Alexandria e Rodes estavam no mesmo meridiano, a diferença em altura equivaleria à diferença em latitude. Este método era bastante impreciso porque, próximo ao horizonte, além da dificuldade em ver os astros pela elevada absorção, há ainda a refração atmosférica, que faz com que vejamos a estrela com uma altura maior do que realmente está. Temos acesso ao trabalho original de Posidonius, mas apenas a partir de fontes secundárias. Segundo Cleomendes (séc. Ia.C.), Posidonius obteve para a circunferência da Terra o valor de 240.000 *estádios*. Já Strabo (54a.C.-24d.C.) afirma que o resultado foi de 180.000 *estádios*. Embora o primeiro valor provavelmente corresponda à observação de Posidonius, o fato é que o valor divulgado por Strabo é que foi disseminado. Ptolomeu (90-170d.C), em sua famosa obra *Geographia*, adotou os valores de Posidonius (180.000 *estádios*). Nesse trabalho estão assinaladas, em vários mapas, as principais marcas do relevo: montanhas, rios, mares, além de inúmeras cidades da Europa, Ásia e África. Devido à grande confiabilidade que Ptolomeu tinha entre os

estudiosos, os valores para o tamanho da Terra, assim como os seus mapas foram amplamente aceitos por mais de 1.200 anos. Ou seja, por séculos acreditou-se que a circunferência da Terra fosse cerca de 7.000 quilômetros menor

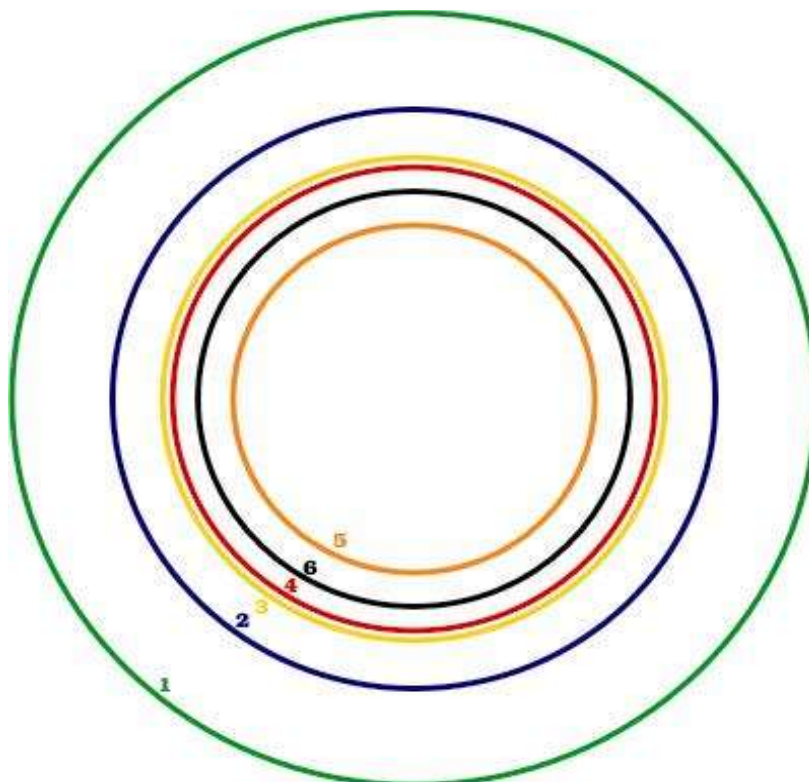


Inserção do famoso mapa-múndi de Ptolomeu numa esfera com as dimensões que ele julgava ter a Terra

Cristóvão Colombo (1451-1506) subestimou os já subestimados valores de Ptolomeu (e Posidonius), acreditando que a Ásia se encontrava a cinco ou seis mil quilômetros a oeste da Espanha. Ele usou esses dados para convencer os seus patrocinadores da viabilidade da viagem para o Oriente. Como sabemos, Colombo e sua tripulação foram salvos porque a América estava entre a Europa e a Ásia. Se

tivesse usado os valores de Eratóstenes, teria que viajar 20.000 quilômetros para oeste (Dreyer,1953). Mesmo que tivesse coragem para isso, certamente não encontraria financiadores para a expedição.

Circunferência da Terra ao longo do tempo



- 1 – Aristóteles: 400.000 *estádios* ou 74.000km (?)
- 2 – Arquimedes: 300.000 *estádios* ou 55.500km (?)
- 3 – Eratóstenes: 250.000 *estádios* ou 46.250km (?)
- 4 – Posidonius (segundo Cleomendes): 240.000 *estádios* ou 44.400km (?)
- 5 – Posidonius (segundo Strabo): 180.000 *estádios* ou 33.300km (?)
- 6 – Circunferência polar de referência da Terra (39.941km).

Foi somente com circunavegação marítima iniciada por Fernão de Magalhães (1470-1521) em 1519 e concluída em 1522 por Sebastián del Cano (1476?-1526) que a humanidade teve uma prova direta da forma da Terra.

Em 820d.C., Al-Mamun (813-885), da escola de Bagdá, determinou para a circunferência da Terra o valor de 39.986km (Berry,1961). Nessa determinação foram utilizados quadrantes gigantes. Infelizmente esse resultado extraordinário não chegou na época à Europa (e se chegasse talvez não o aceitariam).

O francês Jean Fernel (1497-1558), em 1525, encontrou o valor de 39.816km. A partir daí a precisão aumentou rapidamente.

II – VARIANTES DO EXPERIMENTO DE ERATÓSTENES EMPREGADOS HOJE

Antes de abordarmos o método que propomos, vamos apresentar as duas principais variantes do método de Eratóstenes empregadas atualmente nas escolas, em atividades extraclasse.

Como vimos, o método original de Eratóstenes funciona apenas com locais no mesmo meridiano. Isso limita muito o desenvolvimento de atividades com estudantes, pois nem sempre é possível dispor de duas cidades com essa condição, e que estejam ainda separadas por centenas de quilômetros. Por isso duas alternativas se apresentam:

a) Cidade fictícia no equador - Uma vez que se conheça a distância entre o observador e o equador (ao longo do meridiano), divide-se esta pela latitude local, determinada pela altura do Sol¹, obtendo-se então uma escala quilômetros/grau e, conseqüentemente, o diâmetro da Terra. Essa observação é feita no dia do equinócio, quando o Sol passa pelo zênite do equador ao meio-dia solar e a distância zenital do Sol coincide com o valor da latitude local.

¹ Isso é feito pelo mesmo método que descreveremos na etapa 5, página 18.



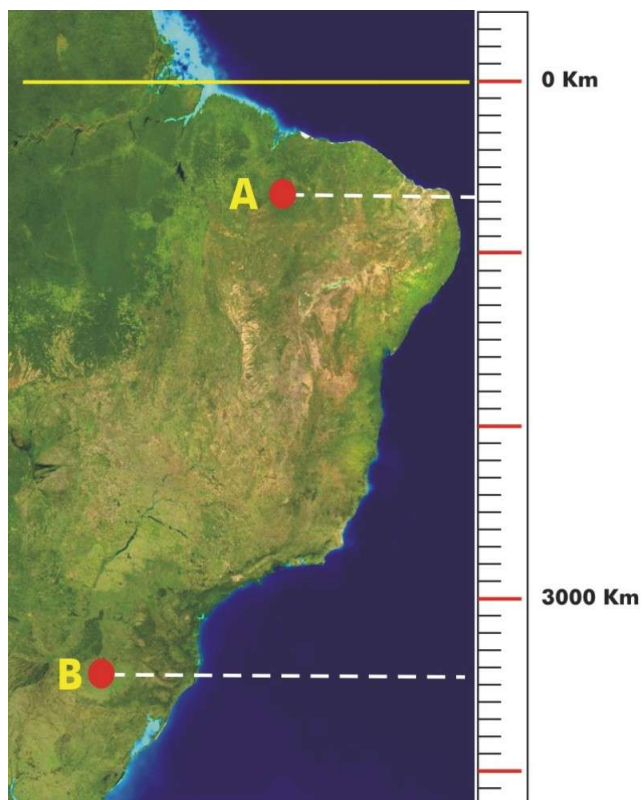
Mapa exemplificando o método da cidade fictícia no equador

Vantagem: Pode ser conduzido com apenas um grupo. Dependendo do ponto de vista, isso é uma desvantagem.

Desvantagens: Às vezes a “cidade hipotética” fica no oceano!, descaracterizando o experimento original de Eratóstenes.

Outra desvantagem é a limitação da data da observação (equinócios) que restringe muito a época da observação.

b) Diferença de latitude - Nesse caso não é usada exatamente a distância entre os observadores, mas sim a distância entre os paralelos dos dois locais. Para isso necessita-se de um mapa com escala de distância no “eixo das latitudes”. Após obter as alturas do Sol e a diferença em latitude, emprega-se a escala do mapa para obter-se a escala quilômetros/ grau.



Mapa exemplificando o método da diferença em latitude

Vantagem: Desenvolve-se o trabalho entre dois grupos. As observações do Sol não precisam ocorrer no mesmo dia.

Desvantagens: A identificação dos locais no mapa, com escala, praticamente já determina as dimensões da Terra; não haveria necessidade de observar o Sol ou calcular a latitude. Desconsiderar a longitude que é visível no mapa e estimar a “distância” apenas em latitude, parece aos estudantes uma solução mágica.

III – MÉTODO PROPOSTO

A idéia do método surgiu a partir de uma troca de correspondência com a professora Manuela do Amaral da Escola Secundária da Cidadela, em Cascais, Portugal, que encontrou em nosso *site* (<http://www.as88constelacoes.hpgvip.ig.com.br/>) algumas atividades de Astronomia que ela julgou úteis para motivar seus estudantes do nível médio de ciências. Naquela ocasião, surgiu a oportunidade de desenvolvermos uma atividade em conjunto entre os estudantes da Escola da Cidadela e o Planetário do Rio. Elegemos, então, o experimento de Eratóstenes para reproduzir.

Ao analisar os métodos habitualmente empregados, percebemos que poderiam ser aperfeiçoados.

Para desenvolver o método definimos alguns requisitos:

- Ser o mais simples possível para facilitar a aplicação em escolas.
- Levar em conta a diferença em longitude para que qualquer pessoa, em qualquer lugar do planeta, pudesse participar.
- Padronizar os métodos de observação e de redução dos dados. Essa padronização é indispensável para que os resultados apresentem consistência entre si.
- Não usar mapa ou globo terrestre em nenhuma fase da atividade, porque se identificamos os locais dos grupos participantes no mapa o problema já está resolvido. Não há desafio algum a ser superado.
- Aplicar o método em qualquer época do ano, e não apenas nos equinócios.

Nossa proposta não é revolucionária. Utilizamos conhecimentos elementares, a maioria dominada pelos estudantes de nível médio. Em nossa pesquisa, contudo, não encontramos nenhuma referência que leve em consideração a diferença de longitude. A nosso ver, isso não só amplia as possibilidades de participação como é didaticamente mais abrangente.

As várias etapas da atividade estão listadas abaixo. Usaremos como exemplo os dados da atividade desenvolvida entre a Fundação Planetário da Cidade do Rio de Janeiro e a Escola Secundária de Cascais, no dia 24 de novembro de 2003.

1. Materiais e informações necessários

Os materiais são de uso comum e de fácil obtenção: régua, relógio, calculadora, gnômon (ver a seguir em Confecção do gnômon), bola de isopor com 20cm de diâmetro, alfinetes, caneta, fita métrica flexível e nível.

Será necessário também conhecer a declinação do Sol no dia, a distância entre os dois locais e o fuso horário das duas cidades.

2. Preparação dos estudantes

Vários conceitos aplicados na atividade estão presentes na ementa de várias disciplinas e, por isso, podem ser explorados pelos professores antes da atividade propriamente dita. Entre os tópicos que podem ser lembrados (ou apresentados) estão:

Geografia - fusos horários, latitude, longitude, equador, meridianos, paralelos, rotação e revolução, orientação de dia e à noite.

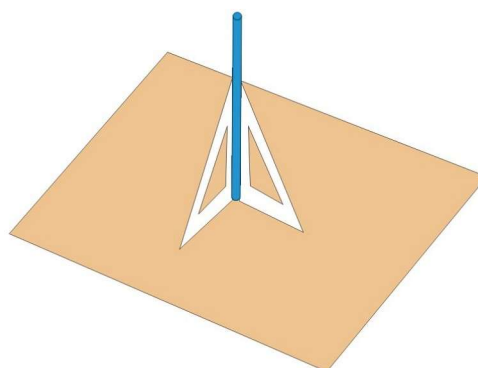
Matemática - relações trigonométricas, semelhanças de triângulos e a geometria.

História - história das ciências, o tamanho da Terra e as grandes navegações, Renascimento científico.

Física - luz e sombra, eclipses, método científico, bússola, relógio de sol, medidas e precisão.

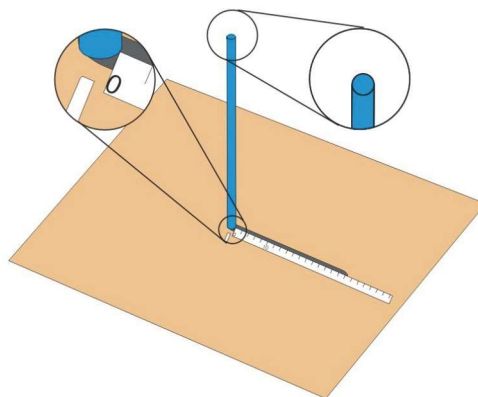
3. Confecção do gnômon

O gnômon pode ser uma haste fincada perpendicularmente ao chão ou fixada em uma base de madeira. Pode-se usar um nível ou um esquadro para avaliar e ajustar a perpendicularidade do chão ou da base, o que é feito em dois pontos ortogonais entre si. A ponta na haste não deve ser “apontada”, como um lápis, pois isso pode gerar dificuldades na leitura quando o Sol estiver muito alto, o que é comum em regiões intertropicais. Sugerimos que a haste tenha 50cm de altura.



Verificando a verticalidade da haste

Para medir o comprimento da sombra pode-se recorrer a uma régua que foi cortada adequadamente para que não haja espaço entre o “zero” e o lado da régua (veja próxima figura).

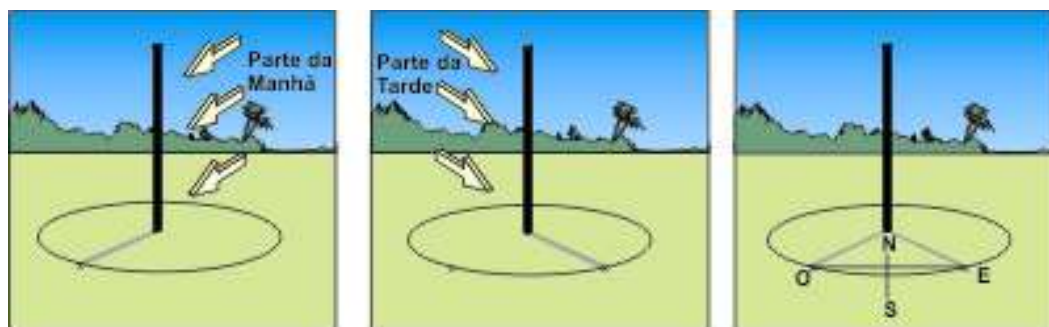


Detalhe da ponta do gnômon e da medição

4. Orientação

Para que possamos realizar a atividade, precisaremos conhecer bem a orientação geográfica do local – a direção norte-sul. Isso deve ser feito vários dias antes da atividade, e aprimorado, se possível. Para isso, usaremos o conhecido método de Vitruvius.

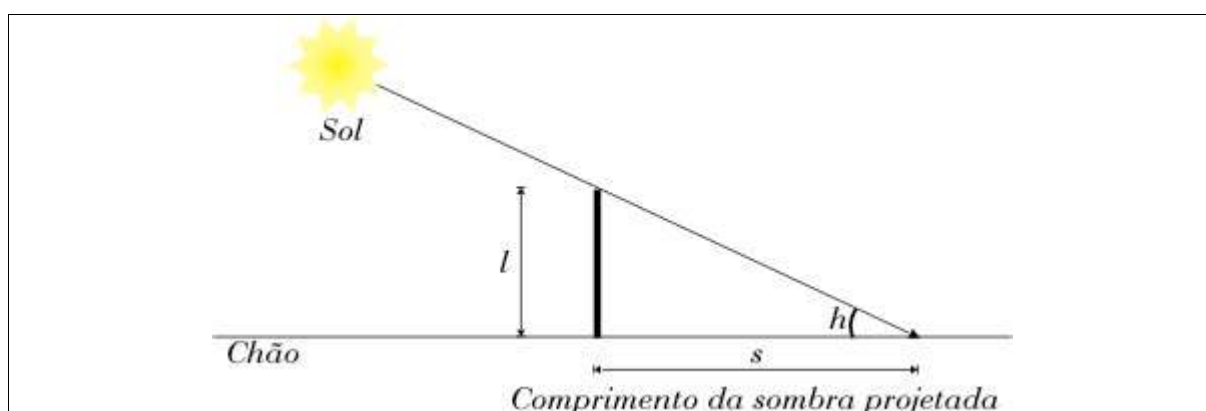
Será necessário um local ao ar livre onde incida a luz solar durante boa parte do dia. Inicialmente faz-se um círculo tendo como centro a base da haste e com o raio igual à metade da altura da mesma. O movimento diário do Sol fará com que a sombra da ponta da haste incida sobre o círculo em dois momentos (um de manhã e outro à tarde); esses pontos no círculo devem ser marcados. Eles definem a linha leste-oeste. A linha perpendicular a esta será a linha norte-sul (meridiana). O meio-dia solar corresponde ao instante em que a sombra incidir exatamente sobre a meridiana.



Determinação da linha Norte-Sul pelo método de Vitruvius

5. Determinação da latitude e instante da culminação

No dia marcado para a observação, acompanha-se a sombra do gnômon. O objetivo é determinar a altura do Sol quando a sombra atingir a meridiana, e o momento em que isso ocorre.



Geometria do gnômon

A altura do Sol pode ser conhecida através dos comprimentos da sombra (s) e da haste (l):

$$h = \arctan (l / s)$$

Onde:

l = altura da haste

s = comprimento da sombra.

Para calcularmos a latitude utiliza-se uma das equações:

$$\varphi = \delta - (90^\circ - h) \quad \text{se a sombra se projeta na direção Sul}$$

ou

$$\varphi = \delta + (90^\circ - h) \quad \text{se a sombra se projeta na direção Norte}$$

Onde:

φ = latitude do lugar

h = altura em graus do Sol na passagem meridiana

δ = declinação do Sol para o dia

A declinação do Sol varia ao longo do ano. É zero nos equinócios, $+23^\circ 27'$ no solstício de inverno (hemisfério sul) e $-23^\circ 27'$ no solstício de verão (hemisfério sul). Os valores diários da declinação do Sol podem ser encontradas no Anuário ou no *site* do Observatório Nacional (www.on.br).

As duas tabelas abaixo indicam os resultados obtidos nos dois locais.

Cascais

Passagem meridiana (TU)	Altura da haste (l)	Comprimento da sombra (s)	Altura do Sol (h)
12h22min	46,7cm	77cm	31,24°

Rio de Janeiro

Passagem meridiana (TU)	Altura da haste (l)	Comprimento da sombra (s)	Altura do Sol (h)
14h38min10s	25,5cm	1,3cm	87,1°

Substituindo os valores na equação para o cálculo da latitude, temos:

Latitude medida do Rio de Janeiro	Latitude medida de Cascais
$90^\circ - (87,1^\circ + 20,42^\circ) = -23,3^\circ$	$90^\circ - (31,24^\circ + 20,42^\circ) = + 38,3^\circ$

6. Marcação das cidades no modelo

Na verdade, não determinamos as longitudes das duas cidades, mas sim a diferença entre elas.

No momento em que a sombra da haste atingir a direção N-S, anota-se a hora local e, a seguir, deve-se convertê-la para a hora universal, ou seja, a que toma como referência o meridiano de Greenwich (soma-se a hora local ao fuso horário correspondente). A diferença entre os instantes das culminações será igual à diferença em longitude. Será necessário converter a diferença em longitude para graus. Como são necessárias 24 horas para a Terra dar uma volta (360°) temos que em uma hora ela gira 15 graus. Desse modo basta multiplicarmos por $15^\circ/h$ a diferença em longitude expressa em horas.

Tomando como exemplo ainda a atividade Rio-Cascais, a diferença de tempo das passagens foi de 2,27h, o que corresponde a $34,05^\circ$.

Para essa etapa usaremos uma bola com uns 20 centímetros de diâmetro, onde serão marcados os pólos e a linha do equador (nós recomendamos que seja utilizada uma bola de isopor porque, como é constituída por duas metades que se encaixam, a junção já identifica o “equador”). É necessário medir também a circunferência da bola, o que é feito com uma fita métrica flexível, para obtermos uma escala que relacione graus com centímetros. Por exemplo, a bola que usamos tinha uma circunferência de 79,5cm e, com isso, a escala será $360^\circ/79,5\text{cm} = 4,53^\circ/\text{cm}$.



Medindo a circunferência da bola de isopor

Com a latitude da cidade obtida pela observação do Sol e a escala recém-calculada, marca-se na bola o ponto (para isso pode-se usar um alfinete) correspondente à primeira cidade (Cascais). A partir desse ponto, traça-se o meridiano dessa cidade até o equador. Deve-se ter em mente que os meridianos são perpendiculares ao equador e convergem para os pólos.



Marcando a primeira cidade (Cascais)

Agora no equador da bola marca-se o ângulo correspondente à diferença entre os instantes das passagens meridianas nas duas cidades para localizar o meridiano da segunda cidade (Rio de Janeiro). Uma vez conhecido o meridiano do Rio, marque com outro alfinete o local correspondente à latitude do Rio.



Ao longo do “equador” é assinalada a diferença em longitude



Marcando a segunda cidade (Rio de Janeiro)

7. Cálculo da circunferência da Terra

Para isso mede-se com uma fita métrica flexível a separação entre as duas cidades na bola de isopor, de modo que a fita circunde a bola num círculo máximo.

A circunferência da Terra é obtida por uma simples regra de três.

$$\mathbf{CG/DCR=DB/ DEP}$$

Onde:

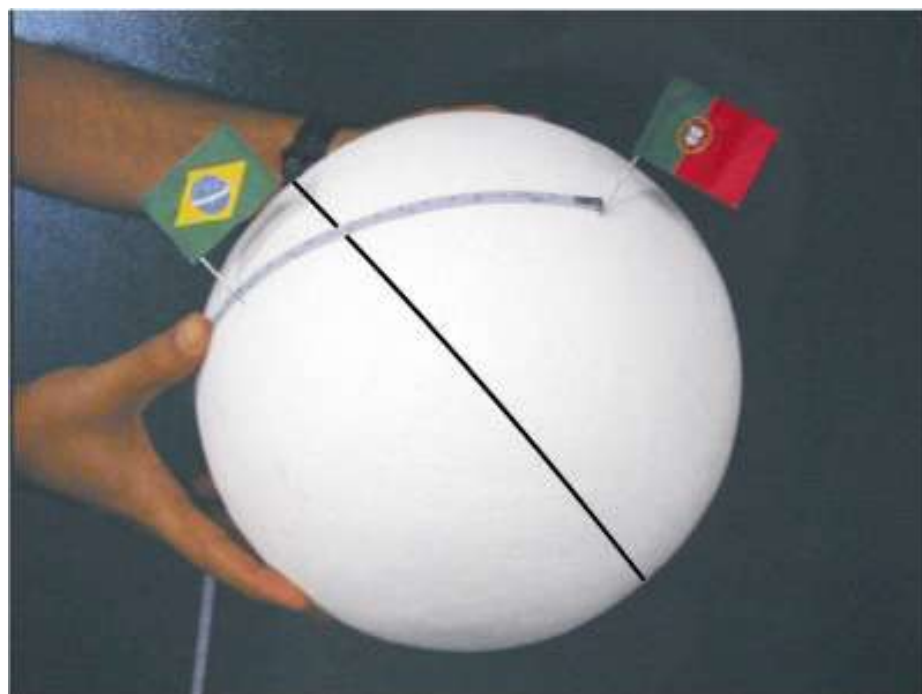
CG = circunferência da Terra

DCR = distância entre as duas cidades. Por exemplo, no *site*:

<http://www.wcrl.ars.usda.gov/cec/java/lat-long.htm>

DB = circunferência da bola de isopor

DEP = distância na superfície da bola entre os pontos (“cidades”)



Medindo a distância entre as duas cidades (sobre um círculo máximo) no modelo

A tabela a seguir resume os dados obtidos na atividade Rio-Cascais realizada em 24/11/2003.

Circunferência da bola	79,5cm
Escala da bola	4,53°/cm
Latitude observada em Cascais	+38,34° (+8,47cm)
Latitude observada no Rio	-23,3° (-5,14cm)
Diferença de longitude	2,27h x 15° = 34,05°
Distância entre as duas cidades na bola	15,5cm
Distância entre Cascais e Rio	7.705km
Circunferência da Terra obtido pela equipe Rio	39.400km
Valor de referência para a Circunferência polar da Terra	39.941km

8. Discussão sobre os resultados da atividade

Com a conclusão da atividade, o professor pode fazer, em conjunto com os estudantes, a análise dos resultados: o que deu certo, o que pode ser aperfeiçoado e comparar a circunferência obtida com a circunferência oficial. Poderá, também, propor questões novas como:

- Comparar os pontos cardeais obtidos pelo método de Vitruvius com os indicados pela bússola. Eles são coincidentes?

- O Sol nasce exatamente no Leste e se põe a oeste?
- Por que a altura do Sol varia ao longo do ano?
- Entre quais latitudes o Sol pode passar a pino? Quando isso acontece no equador?
- Por que a passagem meridiana não acontece sempre à mesma hora (para determinado local)?
- Qual a origem da unidade metro?

IV – A ATIVIDADE DE 2004

Após os estimulantes resultados da atividade com a Escola Secundária da Cidadela, a atividade voltou a ser testada em quatro oportunidades em 2004. Abaixo está a relação dos pares de cidades com respectivos resultados para a circunferência da Terra (o valor de referência para a circunferência polar é de 39.941km):

Rio de Janeiro² / Valência (Espanha)¹ (08/07/2004) = 39.543km

São Pedro (São Paulo)² / João Pessoa¹ (10/08/2004) = 40.770km

Rio de Janeiro² / Veneza (Itália)¹ (16/10/2004) = 38.439km

Rio de Janeiro^{1,2} / Florianópolis³ (12/11/2004) = 45.957km

Responsáveis

1- Fernando Vieira (Planetário-Rio)

2- Paulo Cesar R. Pereira (Planetário-Rio)

3- Carlos Alberto Vieira (Planetário-UFSC)

OBS. A rigor, só a determinação com as cidades de São Pedro (SP) e João Pessoa foram atividade, pois naquela ocasião houve a participação de professores do curso de capacitação promovido pela SAB (Sociedade Brasileira de Astronomia). Nas outras três determinações houve apenas a participação dos responsáveis.

V – A ATIVIDADE DE MARÇO DE 2005

Em janeiro de 2005, começamos os preparativos para uma grande atividade na qual avaliaríamos o método, não só no que diz respeito à precisão da determinação, mas também a sua aplicação em várias escolas ao mesmo tempo. Nessa atividade, a maioria dos responsáveis se baseou apenas nas informações de um *website*.

Participaram cinco Planetários do Brasil e nove escolas da Europa (estudantes entre 10 e 16 anos). Para minimizar a possibilidade de mau tempo, definimos o período de observação em uma semana (14 a 18 de março). Além de um site em português (<http://www.rio.rj.gov.br/planetario/eratostenes/era1.html>) e outro em inglês (<http://www.rio.rj.gov.br/planetario/eratostenes/english/era1.html>), foi utilizado um “servidor” COPHILAB (<http://cophylab.no-ip.org>), onde os integrantes (professores e estudantes) puderam participar de *chats*: *earth chat* e *student lounge*. Este último, exclusivamente entre estudantes. No COPHILAB havia espaços reservados para que cada participante publicasse seus resultados e fotos da atividade.

1. Os participantes

Cidade	Responsável	Instituição	Número de estudantes
Belém – Brasil	Michel Sauma	Planetário do Pará	1
Campinas – Brasil	Romildo Póvoa	Planetário de Campinas	1
Cascais – Portugal	Manuela do Amaral	Escola Secundaria da Cidadela	28 13/14anos

Darmstadt – Alemanha	Thomas Schmidt	Lichtembergschule- Gymnasium	? 15/16anos
Falkenberg – Suécia	Linda Möller	University of Karlstad	?
Florianópolis – Brasil	Carlos Vieira	Planetário da UFSC	?
Haskovo – Bulgária	Ioanna Kokotaneikova	Astronomical Observatory - Haskovo	14
Londres – Reino Unido	Sheila Curtis	Haggerton School Hackney	20
Marselha – França	Marie-Christine	Collège Louis Armand	45
Munich – Alemanha	Alexandre Kraft	Staatliches Gymnasium Pullach	?
Recife – Brasil	Leonardo Neves	-----	?
Rio de Janeiro – Brasil	Fernando Vieira/ Paulo Pereira	Planetário do Rio de Janeiro	15
Sulingen – Alemanha	Ulrich Ernest	Gymnasium Sulingen	20
Varna – Bulgária	Veselka Radeva	Astronomical Observatory - Varna	11



Estudantes da Haggerton School

2. Os resultados obtidos

Na tabela abaixo o primeiro valor indica a latitude calculada e o segundo o instante da culminação, em Tempo Universal.

Cidade/Responsável	14 de março	15 de março	16 de março	17 de março	18 de março
--------------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------

Belém Ozimar C. da Silva Michel Sauma				-00,95° 15h20min	
Campinas Romildo Póvoa				-22.77° 15h17min	
Cascais Manuela do Amaral	38,68° 12h48min	38,10° 12h47min	38,61° 12h44min	38,69° 12h42min	38,66° 12h38min
Darmstad Thomas Schmidt	49,5° 11h34min	49,4° 11h34min			
Falkenberg Linda Möller	56,48° 11h32min	56,55° 11h21min	.	.	.
Florianópolis Carlos Vieira	.	-27,86° 15h21min	.	.	.
Haskovo Ioanna Kokotanekova	.	.	41,62° 10h23min	.	.
Londres Sheila Curtis	.	.	51,6° 12h00min	.	.
Marselha Marie-Christine	.	.	.	43,87° 11h48min	.
Rio de Janeiro Fernando Vieira/Paulo Pereira	-22,1° 15h02min	-22,6° 15h02min	-22,6° 15h04min	-22,8° 15h02min	-22,8° 15h02min
Sulingen (group1) Ulrich Ernest	52,1° 11h26min

Sulingen (group2)	52,6°
Ulrich Ernest	11h38min				
Sulingen (group3)	53,1°
Ulrich Ernest	11h35min				
Varna	42,6894°	42,3572°	42,3840°	42,1983°	42,1159°
Veselka Radeva	10h14min	10h15min	10h16min	10h17min	10h17min

Os participantes de Munique (Alemanha), Goiânia (Brasil) e Recife (Brasil) não puderam observar devido às condições climáticas no período.



Medição da altura do Sol no instante da culminação no Rio de Janeiro



Estudantes do Astronomical Observatory em Varna, Bulgária



Estudantes do Gymnasium Sulingen, Alemanha

3. As determinações da circunferência da Terra

A tabela assinala os pares de cidades, a separação entre elas, o resultado da determinação e o erro percentual. Alguns pares de cidades permitiam determinações em mais de um dia; contudo, optamos por fazer apenas uma. Os números entre parênteses indicam o dia da observação. Para este cálculo foi usada a mesma bola de isopor das atividades anteriores: circunferência de 79,5cm e 4,53°/cm. Os cálculos foram feitos por Fernando Vieira e Paulo Pereira.

Pares de cidades	Separação (km)	Circunferência (km)	Erro percentual
Haskovo-Varna(16)	240	27.257	31,76%
Sulingen-Darmstadt(14)	311	30.906	22,62%
Rio/Campinas(17)	392	36.387	8,90%
Rio/Florianópolis(15)	746	35.035	12,28%
Falkenberg-Darmstadt (14)	819	40.694	1,89%
Cascais-Marselha(17)	1.341	44.983	12,62%
Cascais-Londres(16)	1.594	37.821	5,31%
Varna-Darmstadt(15)	1.641	41.416	3,69%
Marselha-Varna(17)	1.817	40.125	0,46%
Falkenberg-Varna(14)	1.869	37.146	7,00%
Cascais-Darmstadt(15)	1.892	39.583	0,90%
Cascais-Sulingen(14)	2.088	39.523	1,05%
Haskovo-Londres(16)	2.213	41.396	3,64%

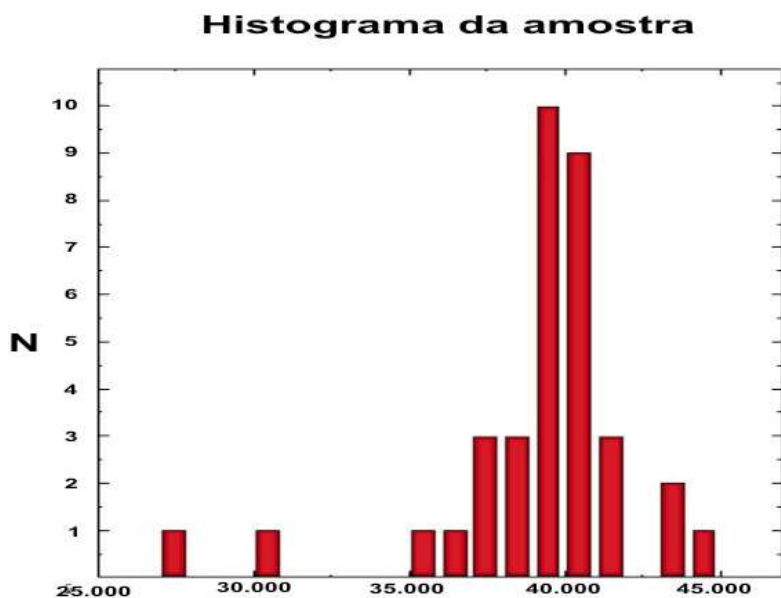
Londres-Varna(16)	2.287	43.811	9,69%
Campinas-Belém(17)	2.394	38.065	4,70%
Rio/Belém(17)	2.449	38.507	3,59%
Cascais-Falkenberg (14)	2.576	39.383	1,40%
Cascais-Haskovo(16)	2.964	38.692	3,13%
Cascais-Varna(14)	3.146	41.685	4,37%
Cascais-Belém(17)	5.984	39.977	0,09%
Marselha-Belém(17)	7.301	43.439	8,76%
Rio/Cascais(16)	7.698	39.256	1,72%
Cascais-Campinas(17)	7.893	39.465	1,19%
Cascais-Florianópolis (15)	8.412	40.531	1,48%
Rio/Marselha(17)	8.874	37.846	5,25%
Varna-Belém(17)	9.017	40.963	2,56%
Rio/Londres(16)	9.272	39.331	1,53%
Rio/Darmstadt(15)	9.564	40.569	1,57%
Rio/Sulingen(14)	9.784	40.160	0,55%
Rio/Haskovo(16)	10.079	39.364	1,44%
Rio/Falkenberg(15)	10.272	40.321	0,95%
Florianópolis-Darmstadt (15)	10.287	39.991	0,13%
Rio/Varna(15)	10.318	40.099	0,40%
Falkenberg- Florianópolis(15)	10.982	40.234	0,73%

Florianópolis-Varna(15)	11.063	39.089	2,13%
--------------------------------	---------------	---------------	--------------

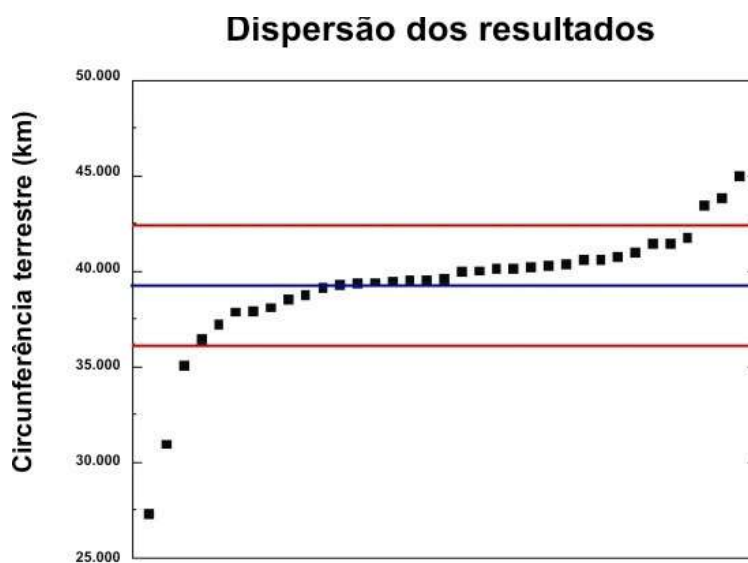
4. Análise estatística da amostra

A tabela a seguir apresenta as principais medidas de posição e de dispersões para a amostra.

Média das determinações	39.230km
Determinação maior	44.983km
Determinação menor	27.257km
Desvio padrão	3.211,9km
Mediana	39.583km
Valor de referência (circunferência polar)	39.941km
Erro (mediana - valor de referência)	358km



O histograma mostra claramente duas determinações (à esquerda no gráfico) que não seguem a tendência do restante da amostra. Essas determinações correspondem aos pares muito próximos Haskovo-Varna e Sulingen-Darmstadt. Desconsiderando-se estes últimos, a distribuição assemelha-se a uma gaussiana.



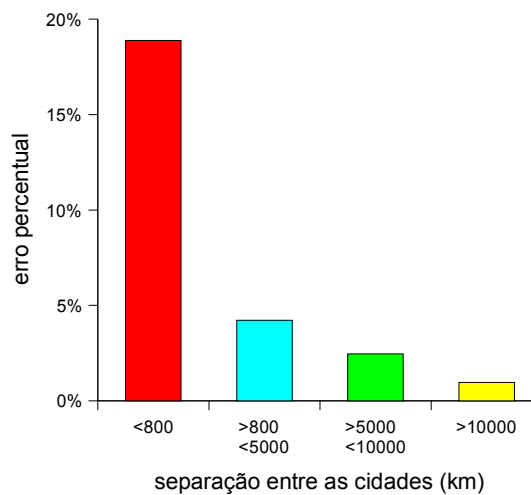
No gráfico acima, as determinações da circunferência estão ordenadas da menor para a maior, de baixo para cima. A linha horizontal azul indica o valor médio (39.230km). As linhas em vermelho indicam os limites superior e inferior do desvio padrão (3.212km). Os seis pontos externos às barras de desvio padrão são: Haskovo-Varna, Sulingen-Darmstadt, Rio-Florianópolis, Marselha-Belém, Londres-Varna e Cascais-Marselha (da menor determinação para a maior).

A análise das determinações indicou que a principal fonte de erro dos pares Haskovo-Varna, Sulingen-Darmstadt, Rio-Florianópolis e Cascais-Marselha foi a pequena separação entre as cidades. Já nos pares Marselha-Belém e Londres-Varna, a principal causa da pequena precisão foi que, embora os erros individuais não fossem muito grandes, uma das cidades estimou para mais e outra para menos; nesse caso os erros se somaram. Em outros casos, mesmo com erros individuais maiores, as duas cidades estimaram igualmente para mais ou para menos; nesse caso o erro total foi menor.

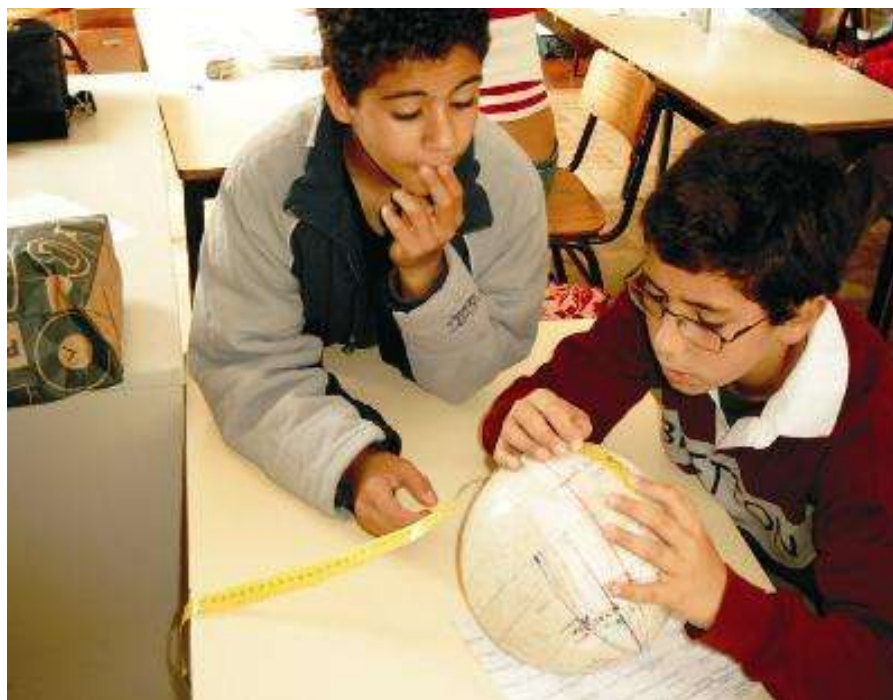
4.1. Erro percentual médio segundo a distância

Após as determinações de todos os pares de cidades possíveis, determinamos os erros percentuais, dividimos os pares por famílias de distâncias e plotamos o gráfico “erro percentual médio x separação”.

Separação (km)	Erro percentual
<800	18,89%
>800 <5000	4,23%
>5000 <10000	2,47%
>10000	0,96%



O resultado mostra claramente que quanto menor a separação entre as cidades maior o erro. Distâncias inferiores a 800km apresentam resultados pouco estimulantes. Essa constatação é extremamente importante porque nos orientará na escolha dos pares de cidades nas próximas atividades.



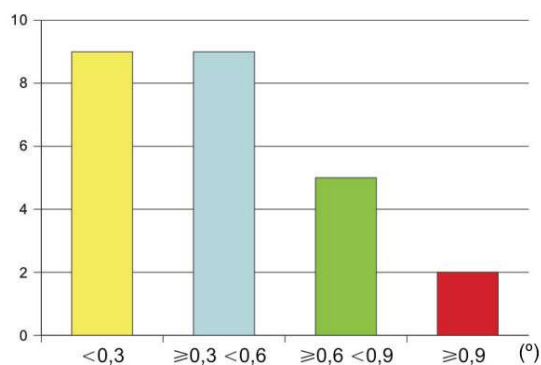
Estudantes da Escola da Cidadela, em Cascais, marcando as cidades numa bola de vôlei

4.2 Distribuição do erro

Foi feita uma análise dos erros da determinação da latitude e do instante da passagem meridiana do Sol de 25 determinações. Para isso foram utilizadas as coordenadas tabeladas das cidades e o software *The Sky* da empresa Bisque.

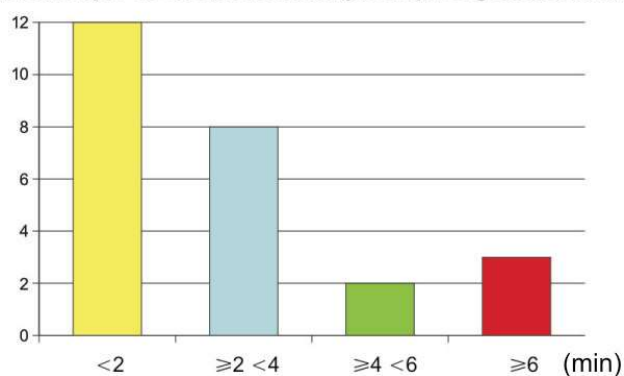
- a. Erro na determinação da latitude e da passagem meridiana

Distribuição de erro na determinação da latitude



b. Erro na determinação da passagem meridiana

Distribuição de erro na determinação da passagem meridiana



Os erros na determinação da latitude foram devidos, principalmente, a não perpendicularidade entre a haste e a base e/ou ao não paralelismo entre a base e o chão. Uma má determinação da passagem meridiana não produz necessariamente uma má determinação na latitude, pois poucos momentos antes ou depois do trânsito a altura do Sol é praticamente a mesma. Consideramos a precisão boa principalmente se levarmos em conta que a maioria dos participantes nunca havia

participado de uma atividade como esta. Com um pouco mais de prática, o erro pode facilmente ficar abaixo de $0,3^\circ$ em latitude e um minuto na passagem meridiana.

CONCLUSÃO

Os resultados das determinações mostraram que o método é muito eficiente; a maioria apresentou erro abaixo de 5%. Considerar cidades em diferentes meridianos, sem dúvida, ampliou as possibilidades de participação e facilitou, por parte dos alunos, a compreensão de vários conceitos abstratos, como coordenadas geográficas e fusos horários.

Como vimos, a precisão das determinações diminui muito com a distância. Se a separação das cidades do par for inferior a 800 quilômetros, os resultados serão pouco impressionantes. Esse quadro se modifica rapidamente com distâncias maiores. Para grandes distâncias (acima de 5.000km), a precisão da medição da altura do Sol e a da passagem meridiana passam a ter mais peso. A análise dos resultados em latitude revelou que a principal fonte de erro está na verticalidade da haste e/ou no paralelismo da base do gnômon com o chão. Já a análise dos erros da passagem meridiana mostrou que a orientação pelo método de Vitruvius poder ser aperfeiçoada.

Insistimos na vantagem de se usar como modelo uma bola de isopor com alfinetes para marcar as cidades, principalmente devido à identificação do equador, à praticidade e à precisão obtida. Cabe ressaltar que os estudantes da Escola Secundária da Cidadela obtiveram resultados muito bons empregando como modelo uma bola de vôlei, na qual as cidades foram assinaladas com um caneta.

Nem todos os professores/mentores da atividade de março de 2005 deram retorno da participação dos estudantes. A quase totalidade dos participantes se contentou em determinar a latitude e a assinalar o instante da passagem meridiana com os estudantes participando ativamente. Mas poucos relataram ter apresentado aos estudantes a fase do modelo. Isso foi para nós uma grande frustração. Não sabemos se essa etapa foi feita. Os estudantes de Varna, de ensino médio,

substituíram o modelo por equações; muito interessante, mas como provavelmente os estudantes não dominam trigonometria esférica, sua aplicação será semelhante a uma caixa preta na qual ao serem introduzidos valores a fórmula devolve o resultado, sem a perfeita compreensão do que está acontecendo.

Nos pareceu pouco produtivo os *chats* entre estudantes. Em geral, não são discutidos assuntos pertinentes à atividade. Já o *chat* com professores cumpriu plenamente seus objetivos com grande participação e troca de experiências.

Neste ano vamos promover a atividade “Revivendo Eratóstenes” durante a Semana de Ciência e Tecnologia, de 3 a 9 de outubro, quando esperamos a participação de escolas de todo o país. Com base nos resultados da atividade de março de 2005, dividiremos as próximas em três etapas:

- 1 - Medir o comprimento da sombra,
- 2 - Determinar a latitude do lugar e
- 3 - Calcular a circunferência da Terra.

Esse tipo de divisão permitirá ao professor escolher a(s) etapa(s) mais adequada(s) para se colocar em prática com os estudantes.

Estamos também nos programando para repetir a atividade com países de língua portuguesa e também com a Biblioteca de Alexandria (nova)!

Um dos objetivos principais da atividade “Revivendo Eratóstenes” era demonstrar a viabilidade de se empregar um experimento simples (baixo custo) na introdução ao método científico, em que os professores e estudantes participassem ativamente e que pudessem chegar a um resultado estimulante. Acreditamos que esse objetivo tenha sido plenamente atingido.

BIBLIOGRAFIA

- BOSCO, R. (1984). *Conceitos de Astronomia*. São Paulo: E. Blucher, 492 p.
- BERRY, A. (1961). *A short history of astronomy from earliest times through the nineteenth century*. New York: Dover, 440 p.
- DREYER, J. L. E. (1953). *A history of astronomy from Thales to Kepler*. 2. ed. New York: Dover, 438 p.
- FISCHER, I. (1975). Another look at Eratosthenes' and Posidonius' determinations of the earth's circumference. *Quarterly Journal of Royal Astronomical Society*, London: v. 16, p. 152-167.
- NEWTON, R. (1980). The source of Eratosthenes' measurement of the earth. *Quarterly Journal of Royal Astronomical Society*, London: v. 21, p. 370-387.
- SCHLOSSER, W.; SCHIMIDT-KALER, Th.; MILONE, E. (1991). *Challenges of astronomy*. New York: Spring-Verlag.
- VOGT, G. L. (1983). Eratosthenes: the librarian who measured the earth. *Odyssey*, Milwaukee, WI, v. 5, n. 9, p. 17-21.
- Revivendo Eratóstenes – uma atividade multidisciplinar. Disponível em <<http://www.rio.rj.gov.br/planetarios/eratostenes/era1.html>> . Acesso em: 2005.
- Remembering Eratosthenes – a multidisciplinary activity. Disponível em <<http://www.rio.rj.gov.br/planetario/eratostenes/english/era1.html>>. Acesso em: 2005

GLOSSÁRIO

altura - distância em graus a partir do horizonte até o astro, medida sobre a vertical do astro.

ascensão reta - uma das coordenadas que, medida sobre o equador celeste e expressa em horas ou graus, é contada a partir do ponto vernal até o círculo horário do astro.

círculo máximo – círculo sobre a superfície de uma esfera, cujo plano contém o centro dessa esfera.

culminação - ver passagem meridiana.

eclipse - fenômeno em que um astro deixa de ser visível, total ou parcialmente, seja pela interposição de outro astro entre ele e o observador, seja porque, não tendo luz própria, deixa de ser iluminado ao se colocar no cone de sombra de outro astro.

equador - círculo máximo na superfície da Terra que corta o eixo de rotação perpendicularmente.

equador celeste - projeção do equador terrestre na esfera celeste.

declinação - coordenada medida a partir do equador celeste até o astro contada ao longo do círculo horário do astro.

distância zenital - distância entre o zênite e o astro, contada ao longo do círculo vertical do astro.

fuso horário - cada uma das 24 partes da superfície terrestre limitada por meridianos equidistantes entre si de 15°, dentro da qual a hora, por convenção, é a mesma. Por razões práticas, muitas vezes a delimitação dos fusos não é exatamente 15°, podendo, por exemplo, ser fronteiras territoriais.

gnômon - uma haste que ao ter sua sombra projetada indica a altura do Sol.

hora universal - instante, na escala de tempo, definido como tempo médio local do meridiano de Greenwich.

latitude - distância angular a partir do equador até o lugar em que a latitude é referida; é contada sobre o meridiano do astro.

longitude - distância angular contada no equador a partir do meridiano de Greenwich até o meridiano do lugar.

meridiano - círculo máximo na Terra que passa pelos pólos.

paralelo - círculo paralelo ao equador.

passagem meridiana - momento em que um determinado astro atinge sua altura máxima.

pólo - eixo de rotação de um astro. Pode também ser o eixo da rotação aparente da esfera celeste.

revolução - período de uma volta completa da Terra em torno do Sol.

rotação - período de uma volta completa da Terra ao redor de si mesma.

trânsito - ver passagem meridiana.